

О движении вихревых колец в несжимаемой среде

О. К. Черемных

Институт космических исследований НАНУ и НКАУ,
Украина, 03680, Киев-187, пр. Глушкова, 40
E-mail: ch_ol@space.is.kiev.ua

Получено 12 июня 2008 г.

Рассмотрено стационарное движение осесимметричного вихревого кольца в несжимаемой среде, в которой скорость \vec{v} и плотность ρ удовлетворяют уравнениям $\text{div } \vec{v} = 0$, $\vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$. Второе уравнение позволяет рассмотреть движение вихревого кольца с распределенной в пространстве плотностью. В работе показано, что плотность несжимаемой среды может быть неоднородной только в области вихревого движения, и является постоянной величиной в области потенциального движения. С учетом этого обстоятельства установлено, что скорость кольца и форма его атмосферы определяются не только геометрическими размерами вихревого ядра и величиной циркуляции скорости, но и пространственным распределением плотности в вихревом ядре.

Ключевые слова: несжимаемая среда, вихревые кольца, вихрь Максвелла, распределенная плотность в вихревой области

O. K. Cheremnykh

On the motion of vortex rings in an incompressible media

The paper deals with the motion of an axisymmetric vortex ring in an incompressible media whose velocity \vec{v} and density ρ satisfy the equations $\text{div } \vec{v} = 0$, $\vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$. The second equation allows us to consider the case when the density varies across the ring. It is shown that the media's density can vary only in the vicinity of the flow possessing vorticity and must be constant if the flow is potential. Thus, the ring's velocity and the shape of its atmosphere depend not only on the size of the vortex core and circulation but also on the spatial distribution of the density across the ring.

Keywords: incompressible media, vortex rings, Maxwell vortex, distribution of the density across a vortex ring

Mathematical Subject Classifications: 76B47

1. Введение

В статье изложены некоторые результаты теоретических исследований, связанные со структурой и движением осесимметричных вихревых колец. Последние известны достаточно давно, легко реализуются и наблюдаются в экспериментальных условиях [1, 2]. В конце девятнадцатого века это гидродинамическое явление интенсивно исследовалось в связи с попытками создания вихревой модели атома [3]. Затем интерес к нему был обусловлен необходимостью исследования динамики образующихся при взрыве больших зарядов характерных грибовидных облаков, структура которых аналогична структуре вихревого кольца [4]. В последнее время [5] вихревые образования рассматриваются как возможные генераторы корональных выбросов массы из Солнца [6, 7].

Замечательной особенностью всех наблюдаемых вихревых колец является их свойство почти стационарно двигаться в однородной среде в течение длительного времени. Проблема описания такого движения давно привлекала внимание многих теоретиков [8]. Работа Кельвина [9] в их ряду занимает наиболее выдающееся историческое положение: в 1867 г. в замечании к переводу Тэйта статьи Гельмгольца [10] он представил без доказательства верный результат для скорости V движения вихревого кольца с «однородной» завихренностью внутри вихревого ядра

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right],$$

где Γ — циркуляция скорости во внешнем потоке около кольца, R , a — большой и малый радиусы тора. Применительно к тонкому однородному кольцу результат Кельвина позднее подтвердил Хикс [8, 11, 12], который также вывел формулу скорости движения полого вихревого кольца

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{2} \right].$$

В 1970 г. три исследователя независимо получили решения для скорости распространения вихревого кольца малого поперечного сечения с произвольным распределением завихренности внутри вихревого ядра: Сэффмен [13], который для нахождения решения использовал теоремы об энергии и импульсе вихря и преобразование, предложенное Ламбом [11]; Френкель [14], который нашел для незакрученного вихревого кольца асимптотическое решение, используя интегральное выражение для функции тока, и Блисс [15], который получил решение методом сращивания асимптотических разложений. В частности, Сэффменом была получена следующая формула для скорости вихревого кольца

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{2} + 2\pi^2 \frac{a^2 \overline{v_\omega^2}}{\Gamma^2} - 4\pi^2 \frac{a^2 \overline{v_\varphi^2}}{\Gamma^2} \right].$$

Здесь черта сверху обозначает усреднение по сечению ядра вихревой нити, v_ω , v_φ — полоидальная скорость и скорость закрутки. Видно, что закрутка замедляет движение кольца, и, в принципе, при достаточно больших ее значениях движение может изменить направление движения.

Несмотря на большое количество работ, посвященных вихревым кольцам, один интересный вопрос, связанный с их движением и структурой, до сих пор не изучен. Это вопрос о распределении плотности и давления в движущемся вихревом кольце и в его атмосфере. Необходимо отметить, что все полученные к настоящему времени результаты по вихревым кольцам предполагают плотность среды внутри кольца и в его атмосфере постоянными. Это предположение

с математической точки зрения существенно упрощает проблему описания движения вихря, но одновременно и существенно ограничивает класс возможных решений. Исследованию вопроса существования и движения вихревых колец с распределенной в пространстве плотностью и давлением посвящена настоящая работа.

2. Исходные уравнения

Если пренебречь вязкостью среды и рассмотреть установившееся движение несжимаемой среды, то исходными для анализа являются уравнения [1, 2, 11]:

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (3)$$

Из этих уравнений следует, что из трех компонент скорости \vec{v} , фигурирующих в уравнении движения (1), только две независимы. Третья компонента скорости находится из уравнения (2). Уравнение (3) определяет плотность среды. Давление среды является пассивной функцией и определяется одной из компонент уравнения (1). Уравнение, связывающее между собой плотность и давление, в этом случае может быть опущено, поскольку эти величины определяются независимо из уравнений (1) и (3).

В цилиндрических координатах R, z, φ , в случае аксиальной симметрии, когда $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, уравнения (1)–(3) представляются в виде:

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \quad Rv_\varphi = W(\Psi), \\ \omega_R &= \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \omega_z = -\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R}, \quad R\omega_\varphi = -\operatorname{div} \frac{\nabla \Psi}{R^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \\ \rho \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) &+ \left(\frac{\rho W^2}{2} \right)' - R^2 p^{*'} + \frac{1}{2} \rho' R^2 v_\perp^2 = 0, \\ \vec{w} &\equiv \operatorname{rot} \vec{v}, \quad p^* \equiv p + \frac{\rho \vec{v}^2}{2} = p^*(\Psi), \\ \rho &= \rho(\Psi), \quad v_\perp^2 = v_R^2 + v_z^2, \quad (\dots)' \equiv \frac{d}{d\Psi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) являются исходными для анализа как вихревого, так и потенциального движения среды.

В дальнейшем нам понадобится функция тока $\bar{\Psi}$ для круговой вихревой нити с циркуляцией Γ . Пусть эта нить лежит в плоскости $z = 0$, так что ее центр расположен на оси $R = 0$, а радиус кольца равен R_0 . В этом случае

$$\omega_\varphi = \Gamma \delta(R - R_0) \delta(z)$$

и из (4) (см. подробнее [2, 8]) получаем

$$\bar{\Psi} = \frac{\Gamma(RR_0)^{1/2}}{2\pi} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]. \quad (5)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, где

$$k^2 = \frac{4RR_0}{[z^2 + (R + R_0)^2]}.$$

Покажем также, что в области потенциального течения ($\text{rot } \vec{v} = 0$) несжимаемой среды, плотность среды постоянна. В этом случае давление, плотность и скорость, как следует из (4), связаны между собой уравнением

$$\frac{dp^*}{d\Psi} = \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{d\rho}{d\Psi}.$$

Это уравнение можно качественно представить следующим образом

$$F(\Psi) = g(\Psi, R, z)f(\Psi),$$

где F, f, g — произвольные функции. Поскольку функции F и f зависят только от Ψ и $g \neq \text{const}$ то существует единственная возможность удовлетворить это уравнение, положив

$$F(\Psi) = 0, \quad f(\Psi) = 0,$$

что в физических переменных приводит к интегралу Коши–Лагранжа [1, 2, 11] с постоянной плотностью среды

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const}, \quad \rho = \text{const}.$$

Заметим, что в области вихревого течения среды уравнение для плотности, давления и скорости качественно можно представить в виде

$$F(\Psi) + G(\Psi, R, z) = g(\Psi, R, z)f(\Psi),$$

которое, очевидно, имеет решения с функциями F и f отличными от нуля.

Таким образом, интересующая нас задача о движении вихревого тора сводится к исследованию пространственного распределения плотности в вихревом ядре и пространственного распределения скорости и давления как в вихревом ядре, так и в области потенциального течения.

3. Внутренняя задача

Следуя Максвеллу [8, 11], полагаем, что вихревое кольцо имеет вид тора (см. рис. 1). Считаем, что тор движется в окружающей его безграничной несжимаемой среде со скоростью V , которая определяется его собственными характеристиками (геометрическими размерами и величиной завихренности).

При малой тороидальности вычисления удобно проводить в ортогональной системе координат r, θ, φ , связанной с круговой осью $R = R_0, z = 0$ (см. рис. 1). В этом случае

$$R = R_0(1 - kr \cos \theta), \quad z = r \sin \theta, \quad \Phi = \varphi, \quad k \equiv 1/R_0, \quad (6)$$

а также

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{rR} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_{\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v_{\varphi} = \frac{W(\Psi)}{R}, \\ \omega_r &= \frac{1}{rR} \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad \omega_{\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial r}, \quad \omega_{\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (7)$$

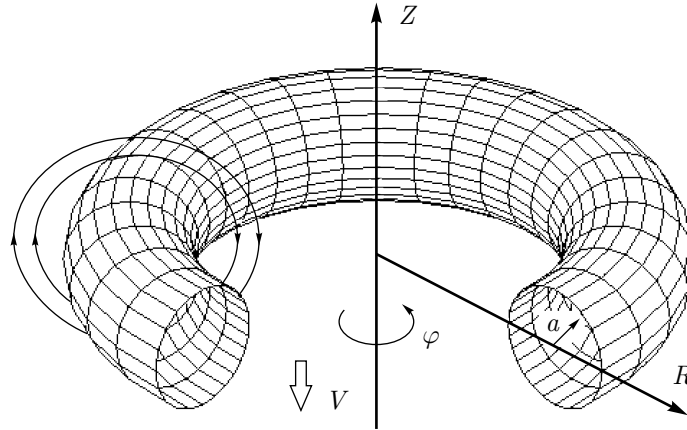


Рис. 1. Вихрь Максвелла

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = kr \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - kr^2 \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{r^2}{\rho} \left\{ R^2 \left(\frac{dp^*}{d\Psi} - \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{d\rho}{d\Psi} \right) - \frac{d}{d\Psi} \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) \right\}.$$

В первом приближении по малому отношению r/R можно считать

$$\Psi = \Psi_0(r) + f(r) \cos \theta. \quad (8)$$

Из (7) при этом следует

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \rho_0 \frac{v_{\theta 0}^2}{r}, \quad p_0 = p_0(r), \quad \rho_0 = \rho_0(r), \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = -R_0 v_{\theta 0}(r), \quad (9)$$

$$\frac{v_{w0}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_0 r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_0 r \frac{\partial v_{w10}}{\partial r} \right) = 3\rho_0 (v_{\theta 0})^2 + r \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 v_{\theta 0}^2) + r \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 v_{\varphi 0}^2). \quad (10)$$

Замечая, что решением однородного уравнения (10) является функция $f = v_{\theta 0}(r)$ находим решение неоднородного уравнения в виде

$$f = v_{\theta 0} g, \\ g(r) = \frac{(r^2 - a^2)}{2} + \int_a^r \frac{dr'}{r' \rho_0 v_{\theta 0}^2} \int_0^{r'} r'' \rho_0 v_{\theta 0}^2 dr'' + \int_a^r \frac{dr'}{r' \rho_0 v_{\theta 0}^2} \int_0^{r'} r''^2 \frac{d}{dr''} (\rho_0 v_{\varphi}^2) dr''.$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении $\frac{r}{R_0} < 1$ функция тока Ψ определена для произвольных пространственных распределений давления и плотности в вихревой области ($r \leq a$).

Для описания внутренней структуры вихря удобно перейти от переменной r , описывающей семейство окружностей $r = \text{const}$, к переменной l , описывающей семейство линий тока $\Psi = \text{const}$. Разлагая функцию тока (7) в ряд

$$\Psi = \Psi_0(l) + \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \Big|_{r=l} (r - l) + f(l) \cos \theta$$

и полагая $\Psi = \Psi_0(l) = \text{const}$ получаем

$$r - l = - \frac{f(l) \cos \theta}{\left. \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right|_{r=l}} = \frac{g(l)}{R_0} \cos \theta = \xi \cos \theta. \quad (11)$$

Уравнение (11) совпадает с уравнением окружности радиуса l , центр которой сдвинут от геометрического центра тора на величину $\xi = g/R_0$ (на рис. 2 положительные смещения направлены к оси симметрии, т. е. влево от точки $R = R_0$). Таким образом, уравнение (11) описывает *семейство вложенных круговых линий тока*. Причем на границе тора смещение отсутствует, т. е. $\xi(l = a) = 0$.

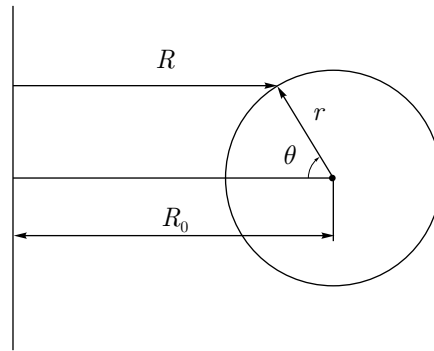


Рис. 2. Квазицилиндрические координаты

Прямыми расчетами легко убедиться, что в координатах l, θ, φ физические величины внутри тороидального шнура имеют вид

$$\begin{aligned} v_l &= 0, \quad v_\theta = v_{\theta 0}(l) \left[1 + \left(kl - \frac{\partial \xi}{\partial l} \right) \cos \theta \right], \\ v_\varphi &= v_{\varphi 0}(l)(1 + kl \cos \theta), \quad \rho = \rho(l), \\ p &= p_0(l) + \left[p(l)v_{\theta 0}^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial l} - kl \right) - \rho(l)v_{\varphi 0}^2 kl \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

и полностью описывает внутреннюю конфигурацию вихревого тора. Фигурирующее в (12) смещение ξ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi(l) &= \frac{(l^2 - a^2)}{2R_0} + \int_a^l \frac{dr'}{r'R_0\rho v_{\theta 0}^2} \int_0^r r'' \rho v_{\theta 0}^2 dr'' \\ &+ \int_a^l \frac{dr'}{r'R_0\rho v_{\theta 0}^2} \int_0^r r''^2 \frac{d}{dr''} (\rho v_{\varphi 0}^2) dr''. \end{aligned} \quad (13)$$

Легко видеть, что $\xi(l) < 0$, т. е. скоростные поверхности сдвигаются вправо (наружу) от геометрического центра вихря.

В частности, если рассмотреть «однородный» вихрь без закрутки $\left(v_{\theta 0} = \frac{\Gamma l}{2\pi a^2}, v_{\varphi 0} = 0, \rho = \text{const} \right)$ то из (13) получаем результат Френкеля [14]

$$\xi(l) = \frac{5}{8} \frac{(l^2 - a^2)}{R_0}.$$

Скоростные поверхности (линии тока) в этом случае имеют внутреннюю структуру, изображенную на рис. 3. Максимальное смещение центров скоростных поверхностей

$$\xi(0) = -\frac{5}{8} \frac{a^2}{R_0},$$

как и следовало ожидать, направлено вправо от центра геометрического поперечного сечения тора.

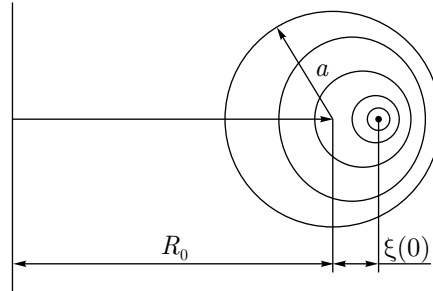


Рис. 3. Линии тока внутри вихревого кольца

4. Внешняя задача

В этом разделе рассмотрим потенциальное течение среды вокруг вихревого тора, движущегося противоположно оси z со скоростью V . Рассматриваемая задача полностью эквивалентна задаче об обтекании неподвижного тора потоком, имеющим на бесконечности скорость V и заданное значение циркуляционной скорости Γ на поверхности тора. Поэтому, как и в предыдущем разделе для описания внешнего потенциального течения будем использовать систему координат r, θ, φ , связанную с тором. Как ранее было показано в разделе 2, потенциальное течение вне вихревого кольца описывается интегралом Коши—Лагранжа (17) с постоянной плотностью и уравнением $\omega_\varphi = 0$ которое в координатах r, θ, φ имеет вид:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = kr \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - kr^2 \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (14)$$

Используя малость величины r/R_0 , легко убедиться прямыми расчетами, что решение уравнения (14) имеет вид

$$\Psi = A + \left(Br + \frac{C}{r} \right) \cos \theta + D \left(\ln r - \frac{r}{2R_0} \ln r \cos \theta \right) + \frac{1}{R_0} \left(Er + \frac{F}{r} \right) \cos \theta,$$

где A, B, C, D, E, F — неизвестные произвольные постоянные. Эти постоянные ищем из следующих соображений. Искомую функцию тока Ψ представим в виде суммы трех функций: однородного прямолинейного потока Ψ_1 , вихревой круговой нити Ψ_2 и неизвестной функции тока Ψ_3

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3.$$

В отсутствие вихревого кольца уравнение (14) описывало бы стационарное однородное течение жидкости со скоростью V в направлении оси z . Функцию Ψ_1 , описывающую такое течение, в цилиндрических координатах можно написать в виде

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2} V R^2.$$

Учитывая связь (6) между цилиндрическими и квазицилиндрическими координатами, вблизи тора функцию Ψ_1 в квазицилиндрических координатах можно переписать следующим образом

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2}VR_0^2(1 - 2kr \cos \theta).$$

Видно, что с точностью до слагаемых, пропорциональных $(kr)^2$, функция (Ψ_1) является решением уравнения (14).

Функция $\Psi_2(r, \omega)$ для круговой вихревой нити была приведена в разделе 2 и имеет вид (5). В окрестности вихревого кольца, когда $R \sim R_0$, $z \sim 0$, $k \sim \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$, $k' = \sqrt{1 - k^2} \sim \varepsilon/2$, $\varepsilon = r/R_0$, а асимптотические выражения для эллиптических интегралов имеют вид

$$K = \ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) k'^2 + \dots, \quad E = 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) k'^2 + \dots,$$

из (5) получаем

$$\bar{\Psi} \approx \Psi_2 = \frac{\Gamma R_0}{2\pi} \left[\ln \frac{8R_0}{r} - 2 - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{8R_0}{r} - 1 \right) \frac{r}{R_0} \cos \theta \right].$$

Видно, что функция Ψ_2 с рассматриваемой точностью также является решением уравнения (14).

И, наконец, при решении граничной задачи об обтекании тонкого вихревого кольца функцию тока необходимо дополнить дипольным слагаемым, пропорциональным $\cos \omega$, убывающим на бесконечности

$$\Psi_3 = \frac{C}{R_0 r} \cos \theta.$$

Постоянную C определим из условий сшивки на поверхности тора.

Из вышеизложенного получаем, что решение уравнения (14) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{1}{2}VR_0^2(1 - \frac{2r}{R_0} \cos \theta) + \frac{\Gamma R_0}{2\pi} \left[\ln \frac{8R_0}{r} - 2 - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{8R_0}{r} - 1 \right) \frac{r}{R_0} \cos \theta \right] \\ & + \frac{C}{R_0 r} \cos \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Из условия постоянства функции тока на поверхности тора и условия непрерывности пологидальных компонент скорости на поверхности тора находим

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left[\ln \frac{8R_0}{a} - \frac{1}{2} + \Delta \right], \quad \Gamma = 2\pi a v_\theta(a), \quad (16)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\rho(a)v_{\theta 0}^2(a)a} \left[\int_0^a r' \rho v_{\theta 0}^2 dr' + \int_0^a r'^2 \frac{d}{dr'} (\rho v_{\varphi 0}^2) dr' \right].$$

В случае «полого вихря» ($v_{\theta 0} = v_{\varphi 0} = 0$, $\omega_{\varphi 0} = 0$, $\Delta = 0$) из (16) получаем результат Хикса [11, 12]

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left[\ln \frac{8R_0}{a} - \frac{1}{2} \right].$$

Если же вихрь «однороден» ($v_{\theta 0} = \frac{\Gamma r}{2\pi a^2}$, $v_{\varphi 0} = 0$, $\omega_{\varphi 0} = \frac{\Gamma}{\pi a^2}$, $\rho = \text{const}$, $\Delta = \frac{1}{4}$), то из (16) следует результат Кельвина [9]

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left[\ln \frac{8R_0}{a} - \frac{1}{4} \right].$$

При $\rho = \text{const}$ и $v_{\varphi 0} = 0$ из (16) следует результат Френкеля [14], а при $\rho = \text{const}$ — результат Сэффмена [13]. Таким образом, решение (16) является обобщением ранее полученных решений на случай произвольных зависимостей $\rho = \rho(r)$, $p_0 = p_0(r)$, $v_{\theta 0} = v_{\theta 0}^0(r)$ и $v_{\varphi 0} = v_{\varphi 0}(r)$.

Из (15) и (16) получаем, что поле скоростей вокруг тора описывается выражениями:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left\{ \ln \frac{a}{r} - \left(\frac{1}{2} + \Delta \right) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right\} \sin \theta, \\ v_\omega &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ 1 + \frac{r}{2R_0} \left[1 - \ln \frac{r}{a} - \left(\frac{1}{2} + \Delta \right) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \cos \theta \right\}, \\ v_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

а плотность и давление среды во внешнем потоке среды можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(a) = \text{const}, \\ p &= p_0(r) - \frac{\rho(a)v_{\theta 0}^2(r)}{2} \frac{r}{R_0} \left[1 - \ln \frac{r}{a} - \left(\frac{1}{2} + \Delta \right) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \cos \theta \\ p_0(r) &= p_0(a) + \frac{\rho(a)v_{\theta 0}^2(a)}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad v_{\theta 0}(r) = v_{\theta 0}(a) \frac{a}{r}. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом того обстоятельства, что на границе вихря справедливы уравнения

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial l} \right|_{l=a} = ka + \Delta, \quad v_{\varphi 0}(l=a) = 0.$$

из (12), (17) и (18) получаем непрерывность всех физических величин при $r = a$ и поэтому рассматриваемый вихрь является «гладким». На рис. 4 и 5 изображено распределение плотности и давления внутри и вблизи вихревого кольца.

5. Атмосфера вихря

Определенный интерес для динамики вихревого кольца представляет увлекаемая им область потенциального течения жидкости, которую называют вихревой атмосферой [1, 2]. В движущейся вместе с тором системе отсчета независимая жидкость, увлекаемая вихревым кольцом, сосредоточена в объеме, ограниченном поверхностью тока, которой принадлежат внешние застойные точки (расположенные вне «тела» кольца). Известно, что в зависимости от характеристик кольца, существуют либо две такие точки, либо одна. В первом случае они расположены на оси кольца, на которой скорость течения жидкости превышает скорость движения кольца, а поперечное сечение области захваченной независимой жидкостью имеет форму замкнутого овала. Во втором случае единственная застойная точка располагается между «телом» кольца и его осью, а увлекаемая кольцом область независимой жидкостью имеет форму кольца. Качественно атмосфера вихря изображена на рис. 6. Область вихревого кольца выделена на рисунке более темным цветом по сравнению с атмосферой. Известно [1], что вихри в виде тороидальных колец не реализуются, поэтому практический интерес представляет только вихревое кольцо, изображенное на рис. 6б.

Радиус поперечного сечения кольца, при котором происходит перестройка структуры течения, можно оценить из формулы (15), заменяя вихревое кольцо круговой вихревой нитью. Используя соотношения между эллиптическими интегралами

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k}$$

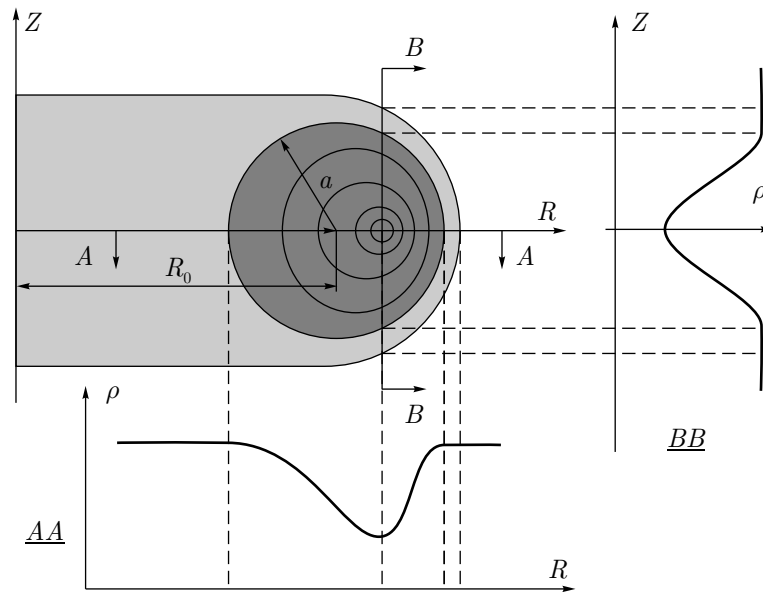


Рис. 4. Распределение плотности внутри и вблизи вихревого кольца

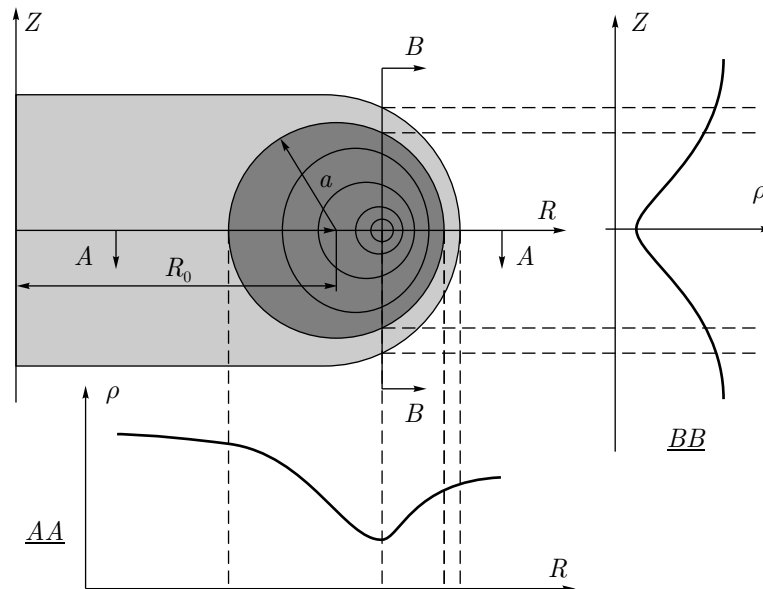


Рис. 5. Распределение давления внутри и вблизи вихревого кольца

из (5) получаем:

$$v_r = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{z}{[(R + R_0)^2 + z^2]^{1/2}} \left[-K(k) + \frac{R^2 + R_0^2 + z^2}{(R - R_0)^2 + z^2} E(k) \right],$$

$$v_\omega = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{z}{[(R + R_0)^2 + z^2]^{1/2}} \left[K(k) + \frac{R^2 - R_0^2 - z^2}{(R - R_0)^2 + z^2} E(k) \right],$$

$$v_\varphi = 0.$$

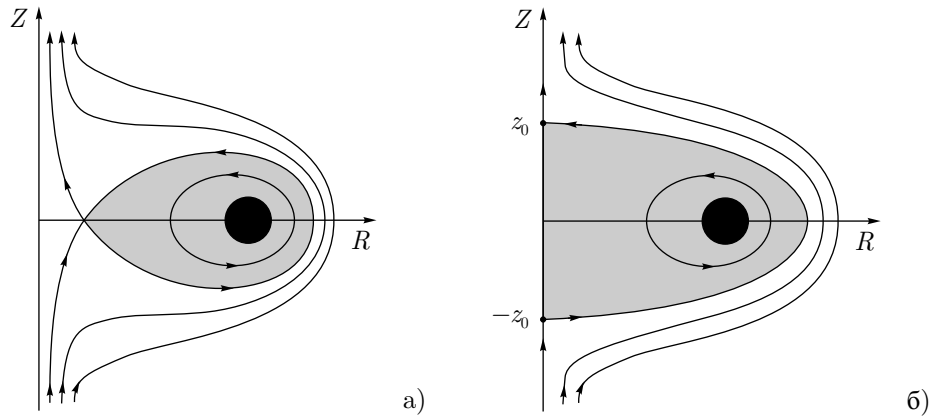


Рис. 6. Схема линий тока в случаях тонкого (а) и толстого (б) вихревых колец

На оси симметрии ($R = 0$) скорости течения равны

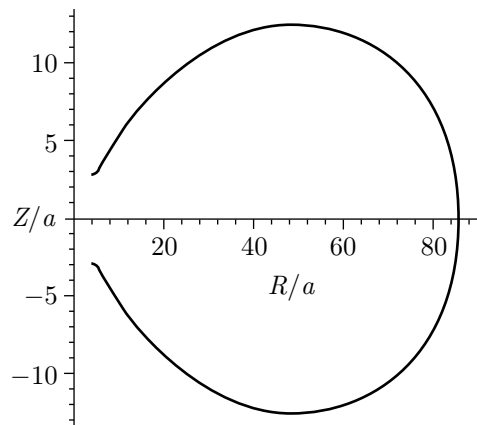
$$v_r = 0, \quad v_z = \Gamma R_0^2 / 2(z^2 + R_0^2)^{1/2}.$$

Тогда в движущейся вместе с кольцом системе отсчета координаты $\pm z_0$ застойных точек определяются из уравнения

$$\frac{\Gamma R_0^2}{2(z_0^2 + R_0^2)^{3/2}} = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \left(\ln \frac{8R_0}{a} - \frac{1}{2} + \Delta \right) \quad (19)$$

и зависят от распределения плотности в вихревом ядре.

Для однородного вихря ($\Delta = \frac{1}{4}$) уравнение (19) имеет решения в интервалах $1 < R_0/a \leq 86$, $-14 < z/a \leq 14$ которые приведены на рис. 7. При таких значениях этих величин R_0/a среда в центре кольца движется вместе с ним. Обычно атмосфера вихря имеет ограниченные размеры и близка к эллипсу. В случае $R_0/a > 86$ атмосфера вихря имеет вид тора и изображена на рис. 6а.

Рис. 7. Положение застойных точек для толстого вихревого кольца в зависимости от величины R/a

6. Основные результаты

В работе получены следующие результаты:

— Показано, что скорость вихревого кольца зависит от распределения плотности и давления в вихревом ядре.

— Получено выражение (16) для скорости вихревого кольца в несжимаемой среде, обобщающее ранее полученные решения работ [15] на случай распределенных плотности и давления.

— Для скорости, плотности и давления получены выражения (28), (29) для течения внутри кольца и выражения (17), (18) для внешнего течения среды вблизи кольца.

— Получено уравнение (19) для атмосферы вихря, с помощью которого можно исследовать ее форму. Показано, что форма атмосферы зависит от распределения плотности в вихревом ядре.

Список литературы

- [1] Faber T. E., *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [2] Batchelor G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1967.
- [3] Thomson Sir W. (Lord Kelvin), On vortex atoms, *Proc. R. Soc. Edinb.*, vol. 6, 1967, pp. 94—105.
- [4] Teller E., Latter A. L., *Our Nuclear Future*, New York: Criterion Books, 1958.
- [5] Могилевский Э. И., Фракталы на Солнце, М.: Физматгиз, 2001.
- [6] Ладиков-Роев Ю. П., Линник А. А., Сальников Н. Н., Черемных О. К., Магнитно-вихревая модель выбросов корональной массы, *Космическая наука и технология*, 2004, т. 10, № 5/6, с. 131—135.
- [7] Kallenrode M. B., *Space Physics*, Berlin: Springer, 2004.
- [8] Saffman P. G., *Vortex Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [9] Thomson Sir W. (Lord Kelvin), The translatory velocity of circular vortex ring, *Phil. Mag. (4)*, 1867, vol. 33, pp. 511—512.
- [10] Helmholtz H., On integrals of the hydrodynamical equations which express vortex-motion, 1958. Перевод П. Г. Тэта, 1867, в *Phil. Mag. (4)*, vol. 33, pp. 485—512 (см. также русский перевод в Г. Гельмгольца, *Основы вихревой теории*, М.—Ижевск: ИКИ, 2002).
- [11] Lamb H., *Hydrodynamics, 6-th. ed.*, Cambridge Univ. Press, 1932.
- [12] Hicks W. M., Researches on the theory of vortex rings. Part II, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1885, vol. 176. pp. 725—780.
- [13] Saffman P. G., The velocity of viscous vortex rings, *Stud. Appl. Math.*, 1970, vol. 49, pp. 371—380.
- [14] Fraenkel L. E., On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid, *Proc. Roy. Soc.*, 1970, vol. 316, с. 29—62.
- [15] Bliss D. B., The dynamics of curved rotational vortex lines, MS thesis, MIT, Cambridge, Mass., 1970.